BILANGAN TERHUBUNG PELANGI PADA GRAF KORONA KIPAS DAN RODA DENGAN GRAF TRIVIAL

Antik Estika Hader
Universitas Dharmas Indonesia
Jln. Lintas Sumatera KM 18 Koto Baru Dharmasraya, Sumatera Barat
email: an.tique@yahoo.com

Abstrak

Konsep tentang bilangan terhubung pelangi termotivasi dari interpretasinya dalam suatu jaringan komunikasi. Sebagai contoh, misalkan graf G di interpretasikan sebagai suatu jaringan selular. Akan disampaikan rute panggilan antara dua titik penerima (acceptor) dengan syarat bahwa rute antara kedua titik tersebut, diberikan suatu frekuensi yang berbeda. Ingin diminimalkan banyaknya spektrum frekuensi yang digunakan dalam jaringan. Jumlah minimal ini di ibaratkan sebagai bilangan terhubung pelangi dari suatu graf. Chakraborty dkk (2009) membuktikan bahwa untuk menghitung bilangan terhubung pelangi dari suatu graf adalah NP-Hard dan jika diberikan suatu pewarnaan sisi graf G, untuk mengecek apakah pewarnaan yang diberikan membuat G terhubung pelangi adalah NP-complete. Peneliti-peneliti terdahulu telah menemukan dan menghasilkan teorema baru terkait bilangan terhubung pelangi dari beberapa kelas graf, dan beberapa graf hasil operasi. Namun, masih banyak masalah-masalah terbuka yang diberikan untuk diteliti lebih lanjut. Dalam penelitian ini dihasilkan bilangan terhubung pelangi dari graf korona kipas dengan graf trivial adalah m+1 dan Untuk suatu bilangan bulat dengan m≥3. bilangan terhubung pelangi dari graf korona roda dengan lintasan adalah m+1..

Kata kunci: *Bilangan Terhubung Pelangi, Graf Kipas, Graf Roda, Graf Trivial*

1. Pendahuluan

Pada tahun 2008, Chartrand, Johns, McKeon dan Zhang memperkenalkan konsep bilangan terhubung pelangi. Mereka mendefinisikan bilangan terhubung pelangi dari G yang dinotasikan dengan rc(G) sebagai minimum m sehingga graf G merupakan graf terhubung pelangi. Konsep tentang bilangan terhubung pelangi termotivasi dari interpretasinya yang menarik dalam suatu jaringan komunikasi yaitu bagaimana meminimalkan banyaknya spektrum frekuensi yang digunakan dalam jaringan. Banyaknya spektrum frekuensi yang digunakan dalam jaringan direpresentasikan sebagai bilangan terhubung pelangi dari suatu graf.

Suatu graf G disebut terhubung pelangi jika setiap dua titik u,v di V(G) terhubung oleh lintasan pelangi u-v. Suatu lintasan P di graf G disebut sebagai lintasan pelangi jika setiap sisi pada lintasan P mempunyai warna yang berbeda. Misalkan setiap dua titik u,v di V(G) terhubung oleh lintasan pelangi, maka lintasan ini kita sebut sebagai lintasan pelangi u-v. Jika lintasan pelangi u-v, mempunyai panjang yang sama dengan jarak u ke v maka lintasan pelangi ini disebut geodesik pelangi u-v.

Graf G merupakan graf terhubung (kuat) pelangi jika memuat geodesik pelangi u-v untuk setiap u,v di V(G), selanjutnya nilai minimum m sehingga graf G merupakan graf terhubung (kuat) pelangi disebut bilangan terhubung(kuat) pelangi dan dinotasikan dengan src(G). Misalkan ukuran dari graf G dinotasikan dengan l, jelas bahwa diam (G)≤ rc (G)≤ src(G)≤l.

Hasil penelitian Chartrand, Johns, McKeon dan Zhang memperkenalkan mengenai bilangan terhubung pelangi diantaranya:

Proposisi 2.1. Misalkan G graf terhubung tak trivial dengan ukuran m maka:

a) src(G)=1 jika dan hanya jika G graf lengkap
b) rc(G)=2 jika dan hanya jika src(G)=2
c) rc(G)=m jika dan hanya jika G graf pohon

Beberapa peneliti lain yang mengkaji mengenai bilangan terhubung pelangi diantaranya yaitu Syafrizal(2013) yang memberikan nilai eksak bilangan terhubung pelangi untuk graf kipas dan matahari, X. Li dan Y. Sun (2014) memberi batas atas bilangan terhubung pelangi untuk graf hasil kali kartesian dan strong product dan D. Fitriani dan A.N.M Salman(2016) yang menemukan bilangan terhubung pelangi dari graf amalgamasi dari beberapa graf.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian murni berkenaan dengan pengembangan teori. Langkah awal dari penelitian ini yaitu mengkaji dan menganalisis beberapa literatur, beserta teknik pembuktian teorema yang digunakan peneliti terdahulu yang terkait dengan konsep bilangan terhubung pelangi.

Selanjutnya peneliti mengembangkan teori dengan menentukan bilangan terhubung pelangi untuk graf korona kipas dan roda dengan graf trivial serta memberikan pembuktiannya.

3. Hasil dan Pembahasan

Misalkan orde dari graf dinotasikan dengan graf korona dari G dengan graf trivial adalah graf yang dinotasikan oleh $G \circ P_1 = (V(G \circ P_1), E(G \circ P_1))$ dan didefinisikan oleh:

$$V(G \circ P_1) = V(G) \cup \{u_i \mid i \in \{1,2,...,|G|\}$$

$$E(G \circ P_1) = E(G) \cup \{v_i u_i \mid v_i \in V(G)\}$$

Teorema1. Misalkan m suatu bilangan bulat, dengan m≥2. Bilangan terhubung pelangi dari graf Kipas $K_m \circ P_1$ adalah:

$$rc(K_m \circ P_1) = m+1$$

Bukti:

Misalkan $K_m \circ P_1 = (V(K_m \circ P_1), E(K_m \circ P_1))$

dimana $V(K_m \circ P_1) = \{v_i, u_i \mid i \in \{1,2,...,m\}$

dan

$$E(K_m \circ P_1) = \{v_0 u_i \mid i \in \{1,2,...,m\}\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid i \in \{1,2,...,m-1\}\} \cup \{v_i u_i \mid i \in \{0,1,2,...,m\}\}$$

akan dibuktikan $rc(K_m \circ P_1)$ =m+1.

Untuk batas bawah, karena jumlah titik berderajat satu dari graf korona kipas dengan graf trivial adalah m+1, maka haruslah bilangan terhubung pelangi dari graf korona kipas dengan graf trivial maksimal m+1.

Selanjutnya untuk pembuktian batas atas dibagi menjadi 3 kasus.
Kasus 1: untuk m=2

Didefinisikan suatu pewarnaan 3 sisi $c : E\{K_2 \circ P_1\} \to \{1,2,3\}$ oleh:

$$c(e) = \begin{cases} 1 \text{ jika } e = v_1 u_1 \text{ atau } e = v_0 v_2 \\ 2 \text{ jika } e = v_2 u_2 \text{ atau } e = v_0 v_1 \\ 3 \text{ jika } e = v_0 u_0 \text{ atau } e = v_1 v_2 \end{cases}$$

Mudah diperiksa bahwa dengan pewarnaan c terdapat lintasan pelangi uv untuk setiap lintasan uv pada graf korona kipas dengan m=2 dengan graf trivial, yaitu lintasan terpendek u-v. Sehingga diperoleh batas atas m+1.
Kasus 2 untuk: m=3

Definisikan pewarnaan 4 sisi $c : E\{K_3 \circ P_1\} \to \{1,2,3,4\}$ oleh:

$$c(e) = \begin{cases} 1 \text{ jika } e = v_1 u_1 \text{ atau } e = v_0 v_2 \\ 2 \text{ jika } e = v_2 u_2 \text{ atau } e = v_2 v_3 \\ 3 \text{ jika } e = v_3 u_3 \text{ atau } e = v_0 v_1 \\ \quad 4 \text{ Lainnya} \end{cases}$$

Akan ditunjukkan dengan pewarnaan diatas terdapat lintasan pelangi uv untuk setiap u,v pada graf korona kipas dengan m=2 dan graf trivial. Untuk u,v yang saling ajasen jelas terdapat lintasan pelangi u-v. Selanjutnya akan diperiksa untuk u,v yang tidak saling ajasen.

Misalkan u=u_i dan v=u_j terdapat lintasan pelangi u-v yaitu u_1,v_1, v_2, u_2 jika u=u_1 dan v=u_2, u_1,v_1, v_0, v_3, u_3 jika u=u_1 dan v=u_3 . Perhatikan bahwa untuk x=v_i dengan i≠0 jelas terdapat lintasan pelangi x-v karena termuat dalam lintasan pelangi u-v

Misalkan u=u_0 dan v=u_j terdapat lintasan pelangi u-v yaitu u_0,v_0, v_1, u_j jika j 1 atau 2 Perhatikan bahwa untuk x=v_0 jelas terdapat lintasan pelangi x-v karena termuat dalam lintasan pelangi u-v

Kasus 3 untuk: m>3

Definisikan suatu pewarnaan m+1 sisi $c: E\{K_m \circ P_1\} \rightarrow \{1,2,3,...,m+1\}$

Oleh:

$$c(e)=\begin{cases} 1 \text{ jika } e=v_{m-2}v_{m-1} \\ 2 \text{ jika } e=v_{m-1}v_m \text{ atau } e=v_0v_1 \\ i \text{ jika } e=v_iu_i \text{ dan i} \in \{1,2,...,m\} \\ i\text{-}1 \text{ jika } e=v_0v_i \text{ dan i} \in \{2,3,...,m\} \\ i+3 \text{ jika } e=v_iv_i \text{ dan i} \in \{1,2,...,m-3\} \\ m+1 \text{ jika } e=v_0u0 \end{cases}$$

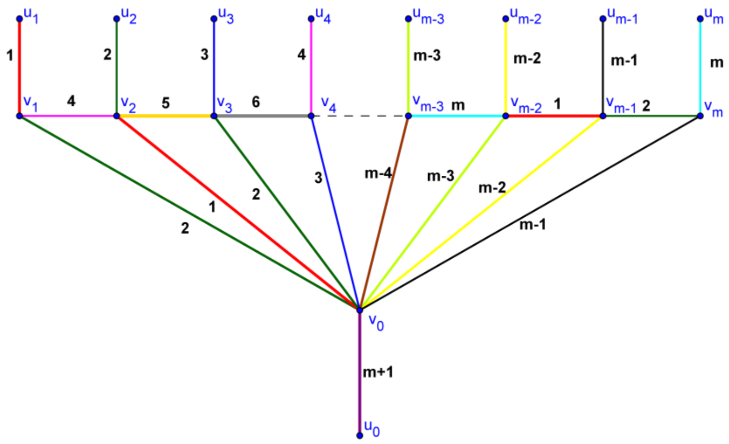
Dengan pewarnaan yang didefinisikan akan ditunjukkan terdapat lintasan pelangi u,v untuk setiap u,v anggota graf korona graf kipas dengan graf trivial.

Untuk u,v yang saling ajasen, jelas terdapat lintasan pelangi u-v. selanjutnya akan diperiksa untuk u,v yang tidak saling ajasen.

Misalkan u=v_i dan v=v_j terdapat lintasan pelangi u-v yaitu $v_i,v_{i+1},v_{i+2},\ldots, v_j$ jika $v_i < v_j$, $v_i,v_{i-1},v_{i-2},\ldots, v_j$ jika $v_i > v_j$.

Misalkan u=u_i dan v=u_j, dengan i atau j tidak sama dengan 0, terdapat lintasan pelangi u-v yaitu u_i, v_i, v_j, u_j jika |i-j|=1, u_i, v_i, v_{i+1}, v_j, u_j jika i<j, j-i=2.

Misalkan u=u_0 dan v=u_j, terdapat lintasan pelangi u-v yaitu u_0, v_0, v_j, u_j . Perhatikan gambar berikut untuk m>3.



Gambar 1. Pewarnaan m+1 pelangi dari graf $K_m \circ P_1$ untuk m>3

Didefinisikan Graf roda W_m dimana $V(W_m)=\{v_i \mid i \in \{0,1,2,...,m\}\}$ dan $E(W_m)=\{v_0v_i \mid i \in \{1,2,...,m\}\} \cup \{v_iv_{i+1} \mid i \in \{1,2,...,m-1\}\} \cup \{v_1v_m\}$. Karena Graf roda adalah spanning subgraf dari graf kipas, dan jumlah titik berderajat satu pada graf korona kipas dengan graf trivial sama dengan jumlah titik berderajat satu pada graf korona roda dengan graf trivial, maka diperoleh akibat berikut:

Akibat 1. Untuk suatu bilangan bulat dengan m≥3. bilangan terhubung pelangi dari graf korona roda dengan graf trivial adalah m+1.

4. Kesimpulan

1. m suatu bilangan bulat, dengan m≥2. Bilangan terhubung pelangi dari graf korona kipas dengan graf trivial adalah m+1.
2. Untuk suatu bilangan bulat dengan m≥3. bilangan terhubung pelangi dari graf korona roda dengan lintasan adalah m+1.

Daftar Pustaka

[1] Bondy, J.A. & Murty, U.S.R. (2008). *Graph Theory*. New York: Springer.

[2] Chakraborty, S., Fischer, E., Matsilah,A., & Yuster,R. (2009). Hardness Ana algorithms for rainbow connection. *Journal of Combinatorial Optimization.* 21, 330–347.

[3] Chartrand, G., Johns, G.L., McKeon, K.A., & Zhang, P. (2008). Rainbow connection in graphs. *Mathematica Bohemica,* 133, 85-98.

[4] Fitriani, D., dan Salman, A.N.M. (2016). Rainbow connection number of amalgamation of some graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics,* 13, 90-99.

[5] Li, X & Sun,Y.(2014). Characterization of graphs with large rainbow connection number and rainbow connection numbers of some graph operations. *Australas. J. Combin,* 60, 306-313.

[6] Li, X & Sun,Y (2012). *Rainbow connections of graphs.* New York: Springer.

[7] Salman,A.N.M., Baskoro, E.T., Ryan, J., Miller, M. (2010). On P_h-supermagic labelings for certain shackles and amalgamations of connected graph.*Utilitas Mathematica*. 83, 333-342.